

ANALÝZA NEURČITOSTÍ VÝPOČTŮ TÝKAJÍCÍCH SE STŘETŮ VOZIDEL

Wojciech Wach¹, Jan Unarski²

Abstract

Celková neurčitost výpočtů při analýze dopravních nehod plyne obecně z neurčitostí měření, výpočtů a modelování. Otázky neurčitosti jsou mimořádně důležité v případech, kdy i nevelké a současné změny mnoha dat mohou způsobit zásadní změnu v pohledu na odpovědnost účastníků nehody. V pojednání jsou v krátkosti objasněny metody analýzy neurčitostí: metody krajních hodnot; analýzy na základě součinitelů citlivosti a simulační metody Monte Carlo. Jejich použitelnost – užitečnost – je dokumentována na příkladu rekonstrukce střetů.

ÚVOD

Analýza fyzikálních jevů se nemůže obejít bez odhadu neurčitostí výpočtů. Neurčitostem jsou rovnocenné takové pojmy jako: chyba výpočtů, rozptyl výsledků, toleranční pásmo, fluktuace atp., ale z důvodů konfrontace s osobami, které nejsou obeznámeny s matematicko – fyzikálními vědami, v soudní síni unikáme termínu „chyba“, jehož fyzikální smysl může být zaměněn za chybu ve výpočtech.

Neurčitost měření je svázána s přesností měřících přístrojů a nejčastěji se předpokládá, že je rovna polovině nejmenšího dělení Δx na stupnici přístroje – i kdyby se policista, který provádí měření zmýlil, řekněme o 2 m, nebude o tom znalec, jak je zřejmé, informován. Bylo zjištěno, že většina měření provedených na místě nehody podléhá normálnímu rozdělení [1]. Statistická neurčitost zadaných hodnot se týká rozptylu hodnot, které nejsou přímo měřeny, ale jsou získány z tabulek; neurčitost modelová pak zahrnuje příklady, kdy fyzikální jev je analyzován pomocí různých matematických modelů.

CITLIVOST FUNKCE. NEJVĚTŠÍ NEURČITOST A STŘEDNÍ KVADRATICKÁ ODCHYLKA

Citlivost funkce:

$$y = f(x_i), i = 1, \dots, n \quad (1)$$

o n nezávisle proměnných popisuje vektor citlivosti funkce $y = f(x_i)$ pro jednotlivé proměnné: $x_i, i = 1, \dots, n$.

¹ Wach, Wojciech, dr inž., Instytut Ekspertyz Sądowych, ul. Westerplatte 9, 31-033 Kraków, Poland, tel. +48/12/422 87 55, e-mail: junarski@ies.krakow.pl

² Unarski, Jan, dr inž., Instytut Ekspertyz Sądowych, ul. Westerplatte 9, 31-033 Kraków, Poland, tel. +48/12/422 87 55, e-mail: wwach@ies.krakow.pl

$$\mathbf{w} = \left[\left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right] \right]^T = [w_i]^T, i = 1, \dots, n \quad (2)$$

S ohledem na různost fyzikálních jednotek jednotlivých elementů vektoru \mathbf{w} je vhodné jej normovat a využívat vektor relativní citlivosti:

$$\mathbf{w}_{\text{rel}} = \left[\left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right] \right]^T, i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Pro databázi:

$$\mathbf{x}_0 = [x_{i0}]^T, i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

Nominální hodnota činí:

$$y_0 = f(x_{i0}), i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

a vektor součinitelů relativní citlivosti $\mathbf{w}_{\text{rel}0} = \mathbf{w}_{\text{rel}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$, (3).

Největší neurčitost může být vyjádřena jako skalární součin:

$$\Delta y_{\text{max}} = \mathbf{w}_0^T \Delta \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n (w_{i0} \cdot \Delta x_{i0}), \quad (6)$$

Kde: $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ – vektor součinitelů citlivosti (2), $\Delta \mathbf{x}_0$ – neurčitosti citlivosti jednotlivých proměnných kolem nominálních hodnot

$$\Delta \mathbf{x}_0 = [\Delta x_{10}, \dots, \Delta x_{n0}]^T. \quad (7)$$

V některých případech může největší neurčitost dosahovat tak velkých hodnot, že dokonce je někdy nereálná, proto je v inženýrské praxi výhodné použít střední kvadratickou odchylku:

$$\Delta y_{\text{sqr}} = \left\| [w_{10} \cdot \Delta x_{10}, \dots, w_{n0} \cdot \Delta x_{n0}]^T \right\| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(w_{i0} \cdot \Delta x_{i0})^2}. \quad (8)$$

Nejvyšší neurčitost a střední kvadratická neurčitost jsou dány vztahy:

$$\Delta y_{\text{max,rel}} = \left| \frac{\Delta y_{\text{max}}}{y_0} \right|, \quad (9)$$

a

$$\Delta y_{\text{sqr,rel}} = \left| \frac{\Delta y_{\text{sqr}}}{y_0} \right|. \quad (10)$$

SIMULACE MONTE CARLO

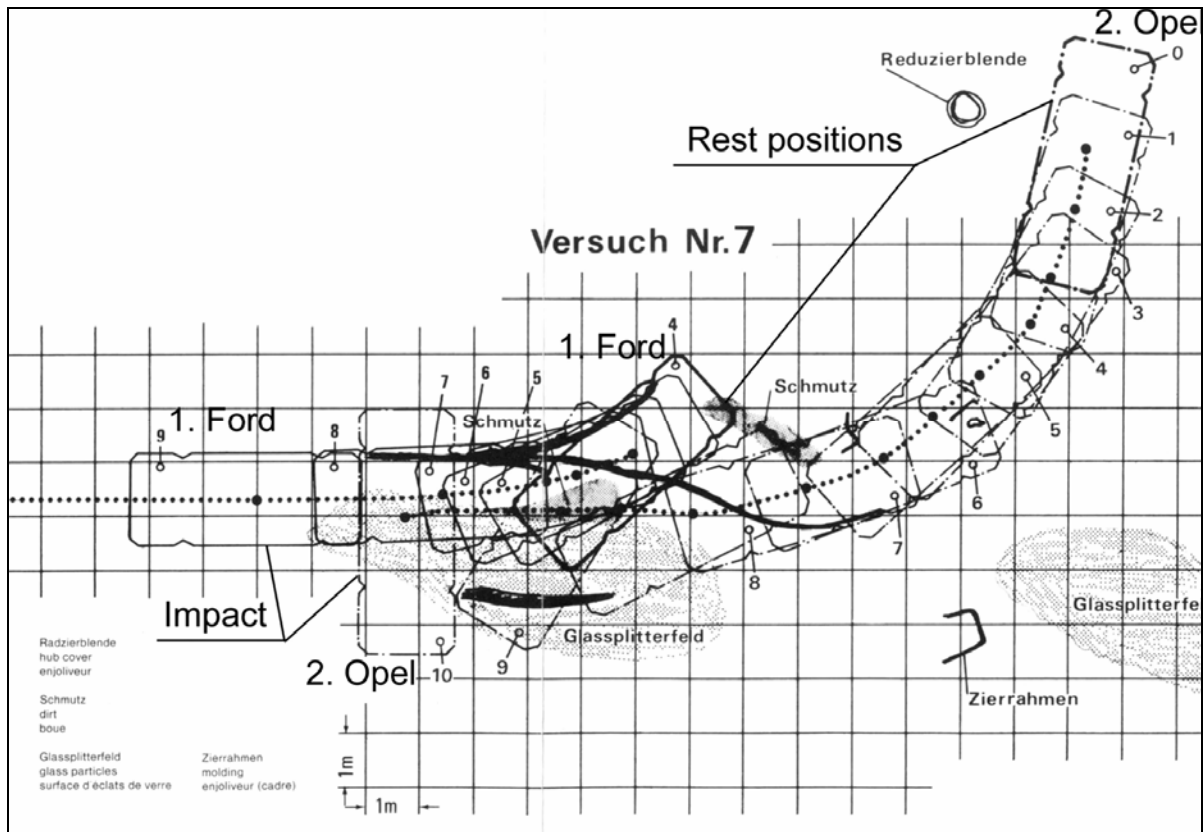
Při analýze neurčitosti výpočtů, týkajících se dopravních nehod, je možno použít simulační metodu Monte Carlo [2, 5-7]. Tato metoda spočívá v opakovaném (mnohdy až mnohosestisíckrát) provedení výpočtů za použití stejného deterministického modelu fyzikálního jevu, přičemž pro každý z výpočtů podléhá souhrn vstupních dat náhodné změně s přihlédnutím k dovolenému rozsahu. Předpokládá se, že vstupní hodnoty jsou statisticky nezávislé a jejich statistické rozdělení je buď známo nebo dáno *a priori*. Výsledek výpočtů je prezentován formou rozdělení pravděpodobnosti, často zvonovou křivkou.

PŘÍKLAD

Byly provedeny výpočty, které vycházely z dat získaných při zkušební kolizi číslo 7 popsané v [9], přitom byla sada vstupních hodnot omezena na hodnoty, které získává policie při ohledání místa dopravní nehody, (tabulka 1).

	1. Ford Taunus 1300	2. Opel Commodore GS
Délka d_j v m	4.28	4.54
Šířka B_j v m	1.705	1.765
Rozvor L_j v m	2.58	2.672
Rozchod předních kol l_j v m	1.422	1.424
Rozchod zadních kol l_j v m	1.422	1.420
Vzdálenost těžiště za přední osou v m	1.14±0.10	1.24±0.10
Součinitel adheze μ_j	0.7±0.1	0.7±0.1
Součinitel odporu postřetovému pohybu f_j	0.7±0.1	0.6±0.2
Hmotnost m_j v kg	990±30	1220±30
Moment setrvačnosti I_j v kgm ²	1387±200	1877±200
Celkový úhel natočení po střetu $\Delta\phi_j$ v °	42°	-13°
Vzdálenost těžiště mezi počáteční a konečnou polohou s_j v m	6.0±0.2	14.3±0.2
Konečná rychlost $V_j^{(end)}$ v km/h	0	0
Směr vektoru střetové rychlosti $\alpha_1^{(imp)}$ (dle modelu {I}), v °	0°±2.0°	0°±2.0°
Směr vektoru rychlosti rozdělení $\alpha_j^{(sep)}$ (dle modelu {I}), v °	1.68°±3.0°	0.63°±3°
Rychlost při střetu zjištěná testem $V_j^{(imp)}$ v km/h (pro porovnání s výsledky výpočtů)	87.7	0

Tabulka 1:– vstupní hodnoty (test č. 7, [9])



Obr. 1: Nákres nehodové situace, která je analyzována [9].

Výpočty

Rychlost na konci střetu

Rychlosti na konci střetu byly určeny za použití teoreticko-empirického vztahu McHenry'ego-Marquarda [10], [11], při tom je úhlová rychlost dána vztahem:

$$\omega_j^{(sep)} = \text{sgn } \Delta\varphi_j \cdot \sqrt{\frac{\mu_j \cdot g \cdot \Delta\varphi_j^2}{\frac{I_j}{m_j \cdot L_j} \cdot |\Delta\varphi_j| \cdot (1 - f_j) + \frac{s_j}{1.7}}}, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

kde:

j – pořadové číslo vozidla,

$\Delta\varphi_j$ – celkový úhel vytočení vozidla při postřetovém pohybu [rad],

μ_j – součinitel adheze,

g – urychlení tíže 9,81 [m/s²],

I_j – moment setrvačnosti vozidla k svislé ose procházející těžištěm [kg m²],

m_j – skutečná hmotnost [kg],

L_j – rozvor náprav [m],

f_j – součinitel odporu při postřetovém pohybu (od 0 pro všechna kola volně otočná po 1 pro všechna kola zablokovaná)

s_j – vzdálenost poloh těžiště mezi střetovou a konečnou pozicí [m],

přítom přímočará rychlost těžišť vozidel:

$$v_j^{(sep)} = 1.7 \cdot \left[\frac{\mu_j \cdot g \cdot |\Delta\varphi_j|}{\omega_j^{(sep)}} - \frac{I_j \cdot |\omega_j^{(sep)}| \cdot (1 - f_j)}{m_j \cdot L_j} \right], j = 1, 2. \quad (12)$$

Po dosazení do vztahů (11) i (12) vstupních parametrů z tabulky 1, jsou jmenovité rychlosti po skončení střetu:

$$\omega_1^{(sep)} = 1.0 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2^{(sep)} = -0.20 \text{ rad/s},$$

$$v_1^{(sep)} = 8.2 \text{ m/s} = 29.5 \text{ km/h},$$

$$v_2^{(sep)} = 12.9 \text{ m/s} = 46.4 \text{ km/h}.$$

Rychlosti před střetem

Pro zajištění větší přehlednosti způsobů analýzy neurčitostí byly při výpočtu rychlostí při zahájení střetu zvoleny vztahy, které vychází ze zákona o zachování hybnosti, přestože takový rozbor může být proveden za pomoci složitějších modelů střetu.

Předpokládá se, že úhlové rychlosti v okamžiku těsně před střetem jsou nulové, vozidla se pohybují v jedné rovině a střet má charakter zaklínění – (tedy probíhá bez skluzu).

Předstřetové rychlosti jsou rovny:

$$v_1^{(imp)} = \frac{m_1 \cdot v_1^{(sep)} \cdot \sin(\alpha_1^{(sep)} - \alpha_2^{(imp)}) + m_2 \cdot v_2^{(sep)} \cdot \sin(\alpha_2^{(sep)} - \alpha_2^{(imp)})}{m_1 \cdot \sin(\alpha_1^{(imp)} - \alpha_2^{(imp)})}, \quad (13)$$

$$v_2^{(imp)} = \frac{m_1 \cdot v_1^{(sep)} \cdot \sin \alpha_1^{(sep)} + m_2 \cdot v_2^{(sep)} \cdot \sin \alpha_2^{(sep)}}{m_2 \cdot \sin \alpha_2^{(imp)}}, \quad (14)$$

Kde:

$\alpha_j^{(sep)}$, $j = 1, 2$ – směr vektoru rychlosti těžiště po střetu vozidla pořadové číslo j ,

$\alpha_1^{(imp)}$ – směr vektoru rychlosti 1. vozidla při zahájení střetu,

Jako výsledek výpočtů byly získány tyto jmenovité rychlosti vozidel v okamžiku prvního kontaktu před střetem:

$$v_1^{(imp)} = 24.1 \text{ m/s} = 86.8 \text{ km/h},$$

$$v_2^{(imp)} = 0.3 \text{ m/s} = 1.2 \text{ km/h}.$$

Pro porovnání je možno uvést, že při testu byly zjištěny hodnoty: 87.7 a 0.0 km/h.

Mezní hodnoty, největší neurčitost a střední kvadratická odchylka

Dosazením vztahů (11) a (12) do vztahů (13) a (14) dostáváme předstřetové rychlosti v závislosti na proměnlivých:

$$\begin{aligned} v_1^{(imp)} &= v_1^{(imp)}(\mu_1, I_1, m_1, f_1, s_1, \mu_2, I_2, m_2, f_2, s_2, \alpha_1^{(sep)}, \alpha_2^{(sep)}, \alpha_1^{(imp)}, \alpha_2^{(imp)}), \\ v_2^{(imp)} &= v_2^{(imp)}(\mu_1, I_1, m_1, f_1, s_1, \mu_2, I_2, m_2, f_2, s_2, \alpha_1^{(sep)}, \alpha_2^{(sep)}, \alpha_2^{(imp)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Pro takto vyjádřené závislosti prakticky nelze vypočíst nejmenší a největší hodnoty za použití nejjednodušší metody mezních hodnot tím, že jsou jednou vkládány nejmenší a největší vstupní hodnoty zachycené v tabulce 1.

Proto je výpočet veden za použití součinitelů citlivosti. Po derivování vztahů (15) dle vztahu (2) a využití dat $x = x_0$ jsou vektory citlivosti w_{10} dla $v_1^{(imp)}$ a w_{20} dla $v_2^{(imp)}$:

$$w_{10} = \begin{bmatrix} 5.877 & \text{m/s} \\ 0.000097 & 1/(\text{s kg m}) \\ 0.01589 & \text{m}/(\text{s kg}) \\ 0.4486 & \text{m/s} \\ 0.7080 & 1/\text{s} \\ 11.3370 & \text{m/s} \\ 0.00003 & 1/(\text{s kg m}) \\ 0.0130 & \text{m}/(\text{s kg}) \\ 0.1224 & \text{m/s} \\ 0.5584 & 1/\text{s} \\ 0.2477 & \text{m}/(\text{s rad}) \\ 0.1871 & \text{m}/(\text{s rad}) \\ 0.0192 & \text{m}/(\text{s rad}) \\ 0.4156 & \text{m}/(\text{s rad}) \end{bmatrix}, \quad \Delta x_{10} = \begin{bmatrix} \Delta\mu_1 \\ \Delta I_1 \\ \Delta m_1 \\ \Delta f_1 \\ \Delta s_1 \\ \Delta\mu_2 \\ \Delta I_2 \\ \Delta m_2 \\ \Delta f_2 \\ \Delta s_2 \\ \Delta\alpha_1^{(sep)} \\ \Delta\alpha_2^{(sep)} \\ \Delta\alpha_1^{(imp)} \\ \Delta\alpha_2^{(imp)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & \\ & 200 & \text{kgm}^2 \\ & 30 & \text{kg} \\ & 0.1 & \\ & 0.2 & \text{m} \\ & 0.1 & \\ & 200 & \text{kgm}^2 \\ & 30 & \text{kg} \\ & 0.2 & \\ & 0.2 & \text{m} \\ & 3.0 \cdot (\pi/180) & \text{rad} \\ & 3.0 \cdot (\pi/180) & \text{rad} \\ & 2.0 \cdot (\pi/180) & \text{rad} \\ & 2.0 \cdot (\pi/180) & \text{rad} \end{bmatrix}$$

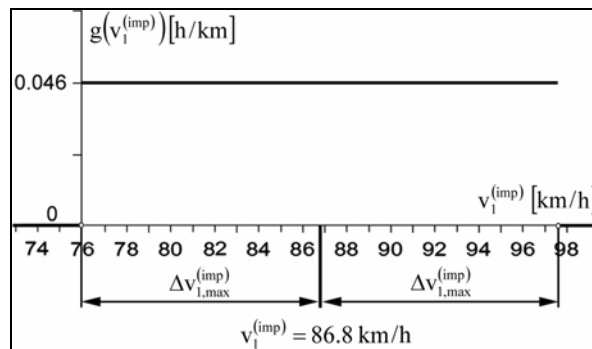
$$w_{20} = \begin{bmatrix} 0.140 & \text{m/s} \\ 2.31 \cdot 10^{-6} & 1/(\text{s kg m}) \\ 0.00020 & \text{m}/(\text{s kg}) \\ 0.01067 & \text{m/s} \\ 0.0168 & 1/\text{s} \\ 0.1011 & \text{m/s} \\ 2.33 \cdot 10^{-7} & 1/(\text{s kg m}) \\ 0.0002 & \text{m}/(\text{s kg}) \\ 0.0011 & \text{m/s} \\ 0.0050 & 1/\text{s} \\ 6.6765 & \text{m}/(\text{s rad}) \\ 12.8797 & \text{m}/(\text{s rad}) \\ 0.0003 & \text{m}/(\text{s rad}) \end{bmatrix}, \quad \Delta x_{20} = \begin{bmatrix} \Delta\mu_1 \\ \Delta I_1 \\ \Delta m_1 \\ \Delta f_1 \\ \Delta s_1 \\ \Delta\mu_2 \\ \Delta I_2 \\ \Delta m_2 \\ \Delta f_2 \\ \Delta s_2 \\ \Delta\alpha_1^{(sep)} \\ \Delta\alpha_2^{(sep)} \\ \Delta\alpha_2^{(imp)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & \\ & 200 & \text{kgm}^2 \\ & 30 & \text{kg} \\ & 0.1 & \\ & 0.2 & \text{m} \\ & 0.1 & \\ & 200 & \text{kgm}^2 \\ & 30 & \text{kg} \\ & 0.2 & \\ & 0.2 & \text{m} \\ & 3.0 \cdot (\pi/180) & \text{rad} \\ & 3.0 \cdot (\pi/180) & \text{rad} \\ & 2.0 \cdot (\pi/180) & \text{rad} \end{bmatrix}$$

V tabulce 2 jsou výsledky výpočtů.

Pořadové číslo vozidla j	Jmenovitá hodnota $v_j^{(imp)}$	Nejvyšší neurčitost dle (6) $\Delta v_{j,max}^{(imp)}$	Středně kvadratická neurčitost dle (8) $\Delta v_{j,sqr}^{(imp)}$
1	24.1 m/s = 86.8 km/h	3.0 m/s = 10.8 km/h	1.4 m/s = 5.0 km/h
2	0.3 m/s = 1.2 km/h	1.1 m/s = 4.0 km/h	0.7 m/s = 2.7 km/h

Tabulka 2: – výsledky výpočtů

Rozdělení pravděpodobností rychlostí při zahájení střetu v určených mezích $v_j^{(imp)} \pm \Delta v_{j,max}^{(imp)}$ i $v_j^{(imp)} \pm \Delta v_{j,sqr}^{(imp)}$, $j=1,2$, je rovnoměrné a na obrázku 2 je znázorněna nejvyšší neurčitost pro 1. vozidlo.

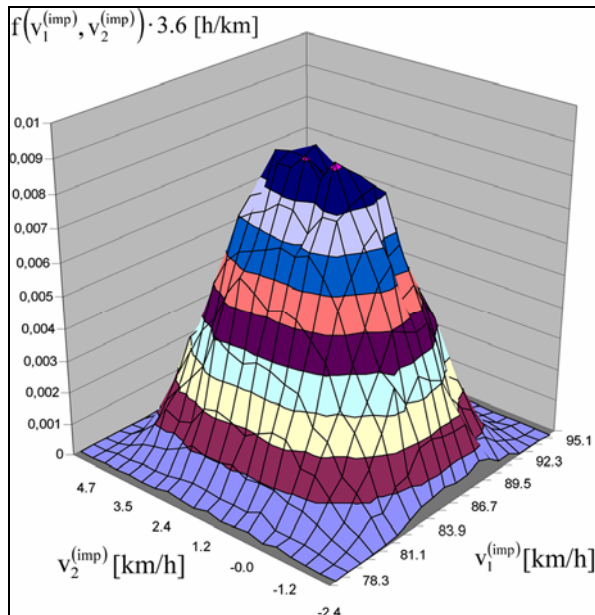


Obr. 2: Jednoduché rozdělení hustoty pravděpodobnosti předstřetové rychlosti 1. vozidla.

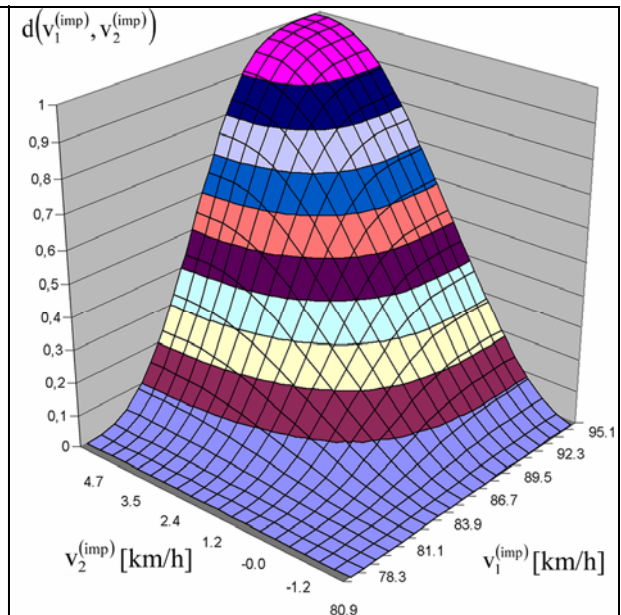
Simulace Monte Carlo

Byla provedena simulace Monte Carlo s využitím algoritmu popsaného v [2]. Byly zjištěny stejné předstřetové rychlosti, ale neurčitost v rozdělení hustoty pravděpodobnosti Příslušné diagramy zužují rozsah nepřesnosti a zjednodušují využití výsledků – to ulehčuje odpovědi na otázky, které klade soud. Protože rychlosti vozidel jsou navzájem provázány je třeba jejich pravděpodobnostní rozdělení shrnout do společného diagramu tak, jak je nakresleno na obrázku 3.

Na obrázku 4 je navíc dvourozměrné (tj. 2 současně zpracovávané veličiny = dvourozměrný statistický soubor) rozdělení předstřetových rychlostí. Tam je možno odečíst, že pravděpodobnost, že rychlosti byly menší než například 88 a 3 km/h je 0,70.



Obr. 3: Dvourozměrné rozdělení pravděpodobnosti předstřetových rychlostí 1. a 2. vozidla získané metodou Monte Carlo.



Obr. 4: Dvourozměrné rozdělení předstřetových rychlostí získané z předchozího diagramu na obr. 3.

ZÁVĚRY

Nejjednodušším způsobem analýzy neurčitostí je zjištění nejmenší a největší hodnoty.

Ve složitějších případech je tato metoda nepoužitelná a může být nahrazena výpočtem odchylky od jmenovité hodnoty, buď jako nejvyšší odchylky, nebo jako střední kvadratické odchylky. Takový výpočet je proveden pomocí analýzy součinitelů neurčitosti.

V každém takovém případě je výsledek dán jako rozdělení hustoty pravděpodobnosti.

Použití metody Monte Carlo dovoluje analýzu neurčitosti, kdy výsledkem je rozdělení hustoty pravděpodobnosti formou zvonové křivky.

Posouzení – využití – výsledků stanovených pomocí stručně popsanych metod vyžaduje hluboké proniknutí do základů problematiky, kterou stanovil procesní orgán a porozumění fyzikálních zákonitostí zkoumaného problému.

LITERATURA

- [1] BARTLETT, W., WRIGHT, W., MASORY, O., BRACH, R., BAXTER, A., SCHMIDT, B., NAVIN F., STANARD, T., *Evaluating the uncertainty in various measurement tasks common to accident reconstruction*, SAE Paper 2002-01-0546.
- [2] WACH W., UNARSKI J., *Determination of vehicle velocities and collision location by means of Monte Carlo simulation method*, Special Publication Accident Reconstruction SP-1999, SAE Paper No. 2006-01-0907.

- [3] BRACH, R., M., BRACH, M., *Vehicle Accident Analysis & Reconstruction Methods*, SAE Publisher, Warrendale 2005, ISBN-10: 0768007763 ISBN-13: 978-0768007763.
- [4] KRYSICKI, W., BARTOS, J., DYCZKA, W., KROLIKOWSKA, K., WASILEWSKI, M., *Rachunek prawdopodobienstwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005, ISBN: 83-01-14291-X.
- [5] WOOD, D., P., O'RIORDAIN, S., *Monte Carlo simulation methods applied to accident reconstruction and avoidance analysis*, Special Publication Accident Reconstruction: Technology and Animation IV SP-1030 (1994), SAE Paper No. 940720.
- [6] BARTLETT, W., *Conducting Monte Carlo analysis with spreadsheet programs*, Special Publication Accident Reconstruction SP-1773 (2003), SAE Paper No. 2003-01-0487.
- [7] BRACH, R., M., *Uncertainty in accident reconstruction calculations*, Special Publication Accident Reconstruction: Technology and Animation IV SP-1030 (1994), SAE Paper No. 940722.
- [8] WIERCINSKI, J., REZA, A., et all, *Wypadki drogowe. Vademecum biegłego sadowego*, Wydanie 2, Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych, Kraków 2006, ISBN: 83-87425-32-X.
- [9] BURG, H., LINDENMANN M., *Unfallversuche*, Verlag Information Ambs, Kippenheim 1982, ISBN: 3-88550-021-3.
- [10] MARQUARD, E., *Fortschritte in der Berechnung von Fahrzeug – Zusammenstößen*, ATZ Automobiltechnische Zeitschrift 3 (1968).
- [11] *CRASH3 Technical Manual*, U.S. Department of Transportation, National Highway Traffic Safety Administration, Washington D.C., 1986.