VYUŽITÍ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODY MONTE CARLO V SOUDNÍM INŽENÝRSTVÍ

Michal Kořenář[1]

Abstrakt

Rozvoj výpočetní techniky v poslední době umožnil také rozvoj výpočetních metod, které nejsou založeny na bázi deterministických výpočtů. Jsou to metody pravděpodobnostní. Jednou takovouto pravděpodobnostní metodou je metoda Monte Carlo. Pravděpodobnostní metody jsou využívány především při posuzování konstrukcí, ale díky své pružnosti a, pokud mluvíme o metodě Monte Carlo, i jednoduchosti a pochopitelnosti, mohou být s úspěchem aplikovány i na další odvětví. Jedinou podmínkou pro použití metody Monte Carlo je, aby bylo možno výskyt veličiny, její velikost, nebo průběh v čase popsat pomocí histogramů.

Jak již bylo řečeno v úvodu, metoda Monte Carlo je pravděpodobnostní metoda. To znamená, že ve výpočtu figuruje jedna nebo více veličin vyjádřená pomocí histogramu, který v podstatě reprezentuje pravděpodobnost její velikosti nebo výskytu.

Postup výpočtu je podrobněji popsán v článku. V podstatě jsou pravděpodobnostní metody založeny na generaci náhodných čísel (tato náhodná čísla mají uniformní rozdělení) a jejich transformací tak, aby jejich rozdělení odpovídalo rozdělení příslušných histogramů, které reprezentují veličiny jejichž velikost se může určitý způsobem měnit (např. ocelové válcované profily mají z výroby různé plochy průřezu).

V článku je dále uveden příklad aplikace této metody v soudním inženýrství. Metodou Monte Carlo byl proveden výpočet věčné renty.

1 ÚVOD

Rozvoj výpočetní techniky v poslední době umožnil také rozvoj výpočetních metod, které nejsou založeny na bázi deterministických výpočtů. Jsou to metody pravděpodobnostní. Jednou takovouto pravděpodobnostní metodou je metoda Monte Carlo. Pravděpodobnostní metody jsou využívány především při posuzování konstrukcí, ale díky své pružnosti a, pokud mluvíme o metodě Monte Carlo, i jednoduchosti a pochopitelnosti, mohou být s úspěchem aplikovány i na další odvětví. Jedinou podmínkou pro použití metody Monte Carlo je, aby bylo možno výskyt veličiny, její velikost, nebo průběh v čase popsat pomocí histogramů (viz dále).

[1] Ing. Michal Kořenář, VUT-Brno, FAST, Veveří 331/95, 628 00 Brno, korenar.m@fce.vutbr.cz

2 OBECNĚ O METODĚ MONTE CARLO

2.1 PRINCIP METODY MONTE CARLO

Jak již bylo řečeno v úvodu, metoda Monte Carlo je pravděpodobnostní metoda. To znamená, že ve výpočtu figuruje jedna nebo více veličin vyjádřená pomocí histogramu, který v podstatě reprezentuje pravděpodobnost její velikosti nebo výskytu. Postup výpočtu je popsán v dalších kapitolách.

2.2 GENEROVÁNÍ NÁHODNÝCH ČÍSEL

Jak uvidíme dále, metoda Monte Carlo a také všechny podobné metody závisí na generování numerických realizací náhodných proměnných s požadovaným rozdělením. Tyto realizace nazýváme náhodná čísla. Ve většině případů je potřeba vygenerovat velké množství náhodných čísel. Takovéto množství může být samozřejmě generováno pouze za použití výpočetní techniky. Počítač také zajišťuje zpracování simulovaného modelu a je použit k vyhodnocení a reprezentaci výsledků.

Generování náhodných čísel s určitým rozdělením probíhá ve dvou krocích. Prvním krokem je generování náhodného čísla na určitém intervalu (např. interval <0;1>) s uniformním rozdělením. Toto generování se provádí takzvaným primárním generátorem (viz dále). Pokud je potřeba takto generovaná náhodná čísla převést na hodnoty s určitým pravděpodobnostním rozdělením, musí se provést určitá transformace.

2.3 PRIMÁRNÍ GENERÁTORY

Řadu náhodných čísel s konstantní distribuční funkcí (pravděpodobnost výskytu je na celém intervalu stejná), které jsou statisticky nezávislé, lze získat dvěmi způsoby. Přírodní náhodná čísla jsou generována pomocí sledování přírodních jevů s náhodným chování. Naproti tomu pseudonáhodná čísla jsou generována počítačem podle určitého algoritmu. V praxi nám postačí generátor pseudonáhodných čísel.

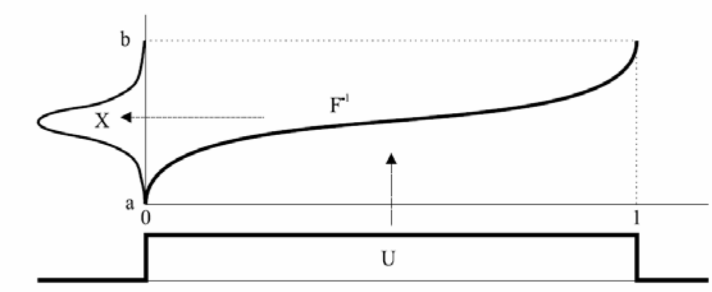
Druhy generátorů:

- přírodní generátory
- tabulky náhodných čísel
- generátory pseudonáhodných čísel

2.4 TRANSFORMACE

Jak již bylo řečeno, transformací lze získat náhodné veličiny s požadovaným rozdělením z náhodných čísel, které generuje primární generátor. Pro transformaci lze použít mnoho metod, přičemž tyto se liší jak účinností tak přesností. Také je možné některé metody používat obecně a jiné pouze na určitá rozdělení.

Grafické znázornění příkladu transformace pro normální rozdělení s parametry $N(\mu, \sigma)$ je uvedeno na obr. 1. Jde o takzvanou inverzní transformaci.



Obr. 1 Inverzní transformační metoda

Matematicky lze tuto transformaci popsat jako:

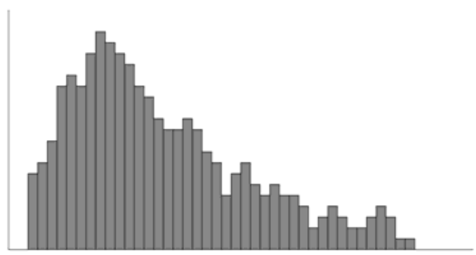
$$X = F^{-1}(U)$$

- U ….. náhodná proměnná generovaná primárním generátorem
- F^{-1} … inverzní distribuční funkce
- X ….. náhodná proměnná s požadovaným rozdělením

(v našem případě N(μ, σ))

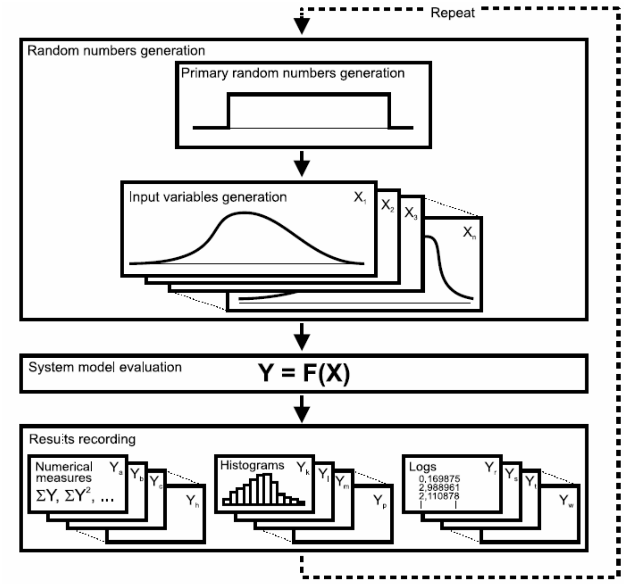
2.5 HISTOGRAMY

Histogramy jsou grafickým vyjádřením pravděpodobnostní hustoty funkce. Histogramem se snažíme aproximovat distribuční funkci náhodné veličiny. Za náhodnou veličinu se v tomto případě považuje sledovaná proměnná (např. plocha průřezu ocelového profilu, která se může kus od kusu lišit). Histogram náhodné veličiny může vypadat jako na Obr. 2, kde záleží, zda je náhodná veličina diskrétní (případ plochy ocelového průřezu) nebo spojitá (např. normální rozdělení pro vyjádření náhodných odchylek).



Obr. 2 Příklad histogramu pro diskrétní náhodnou veličinu

2.6 POSTUP VÝPOČTU



Obr. 3 Schéma postupu výpočtu metodou Monte Carlo

Na obr. 3 je vidět postup výpočtu pomocí metody Monte Carlo. Prvním krokem je generování náhodného čísla s uniformním rozdělením a jeho následná transformace podle požadovaného rozdělení. Poté takto transformovaná náhodná čísla vstupují do výpočtu. Výpočtu se mohou účastnit také konstanty – jejich velikost se po celou dobu výpočtu nemění. Vypočítané veličiny jsou zapsány do paměti pro pozdější zobrazení a celý výpočet se opakuje pro nově generované náhodné číslo. Počet opakování se dá nastavit a obecně lze říci, že čím větší počet opakování tím přesnějších výsledků dosáhneme. Výsledky je možné prezentovat jak v číselné tak v grafické podobě viz obr. 6.

2.7 VÝPOČET VĚČNÉ RENTY METODOU MONTE CARLO

Výraz věčná renta znamená předpoklad pravidelných výnosů po teoreticky nekonečně dlouhou dobu. Vztah pro výpočet věčné renty se udává jako součet nekonečné řady pravidelných výnosů.

Vztah pro věčnou rentu:

$$C_V = \frac{z}{i}$$

- C_V…… vložené prostředky
- z…… pravidelný výnos (věčná renta)
- i…… setinná úroková míra

Tento vztah počítá s konstantní úrokovou mírou. Úroková míra se však může v průběhu času měnit. Tuto změnu je možné vyjádřit histogramem a věčnou rentu pak počítat pomocí pravděpodobnostní metody. Výsledkem tedy nebude jedno číslo, ale velikost výnosu s určitou pravděpodobností.

Vztah pro věčnou rentu pak bude vypadat následovně:

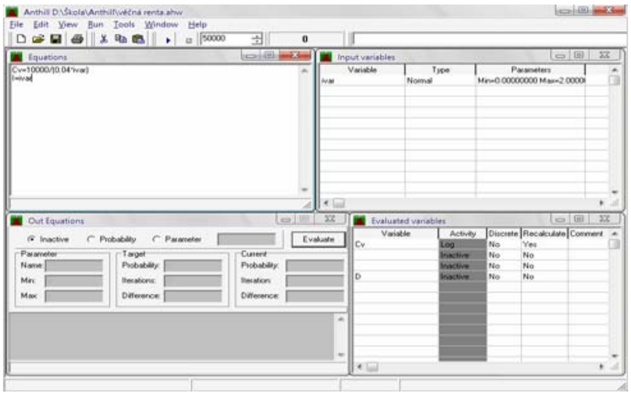
$$C_V = \frac{z}{i \cdot i_{\mathrm{var}}}$$

- C_V…… vložené prostředky
- z…… pravidelný výnos (věčná renta)
- i…… setinná úroková míra
- i_{var}…… variabilita úrokové míry vyjádřená histogramem

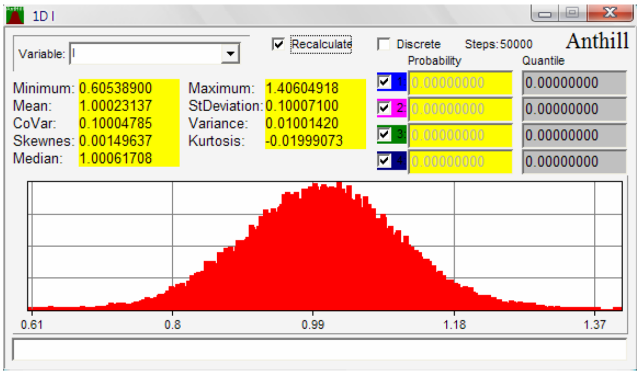
Variabilitu úrokové míry i_{var} budeme považovat za veličinu s normálním rozdělením s parametry N(1;0.1). Program AntHill, ve kterém byl výpočet zpracován, přímo obsahuje histogram pro normální rozdělení, kde stačí zadat střední hodnotu, rozptyl a maximální a minimální hodnotu (v našem případě 0 a 2).

Pro náš výpočet uvažujme z = 10 000 a i = 4%.

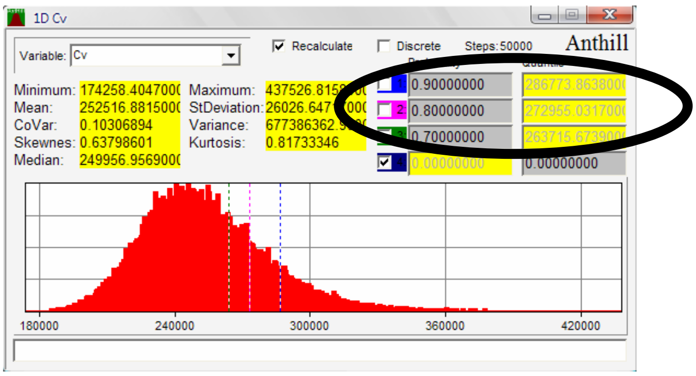
Zadání v programu AntHill pak bude vypadat:



Obr. 4 Zadání v progamu AntHill



Obr. 5 Proměnná i_{var}



Obr. 6 Reprezentace výsledků programem AntHill

Na obrázku č. 6 vidíme okno programu AntHill obsahující výsledky výpočtu po 50 000 iteracích. Z tohoto okna můžeme vyčíst statistické vlastnosti výsledného histogramu. Nás bude nejvíce zajímat pravděpodobnost jednotlivých výsledků. Tak například 90% výsledků bude rovno nebo menších než 286 773,9. V našem případě při vložené počáteční částce 286 773,9 Kč a úročení 4% s variabilitou vyjádřenou normálním rozdělením N (1;0,2) bude věčná renta s pravděpodobností 90% rovna nebo větší než 10 000 Kč. Stejně můžeme výší vložené částky odečíst pro libovolnou pravděpodobnost, např. pro 80% je to 272 955 Kč.

3 ZÁVĚR

Uvedený příklad je samozřejmě velice jednoduchý a jeho výsledky lze odhadnout (vypočítat) i bez použití pravděpodobnostních metod prostou znalostí statistiky. Síla a použitelnost pravděpodobnostních metod se ukáže teprve ve složitějších případech, kde bude do výpočtu vstupovat více proměnných vyjádřených histogramy. V takovýchto případech je již využití některé z pravděpodobnostních metod, například metody Monte Carlo, nutné a obecné analytické řešení je naopak velice obtížné, ne-li nemožné.

Cílem tohoto příkladu bylo názorně ukázat možnosti metody Monte Carlo v praxi. Proto byly použité vstupní hodnoty pouze orientační a byl zvolen jednoduchý výpočet, na kterém je jasně vidět co a proč bylo zadáno a jaké výstupy byly výpočtem získány.

LITERATURA

[1] Marek, P.-Brozzetti, J.-Guštar, M.-Tikalsky, P. *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation*. 2nd edition, ÚTAM AV ČR Praha, 2003. 471 s. ISBN 80-86246-19-1.

[2] Teplý, B.-Novák, D. *Spolehlivost stavebních konstrukcí*.Brno: CERM, 2004, 89s. ISBN 80-214-2577-6